Lösungen:

1. a) Es gilt der Impulserhaltungssatz: $p_{vor} = p_{nach}$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, u$$

Daraus folgt: $u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

Der Energieerhaltungssatz gilt nicht: $E_{vor} \neq E_{nach}$

$$E_{vor} = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 \qquad E_{nach} = \frac{m_1 + m_2}{2} u^2$$

Durch Einsetzen erhält man für E_{nach}:

$$E_{nach} = \frac{m_1 + m_2}{2} \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right)^2$$

$$E_{nach} = \frac{1}{2} \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2}$$

Für den Betrag der kinetischen Energie, der sich in Wärme verwandelt, ergibt sich folglich:

$$\Delta E = E_{vor} - E_{nach} \;\Rightarrow\; \Delta E = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 - \frac{m_1 + m_2}{2} \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right)^2$$

Durch einfaches Umformen ergibt sich:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 v_1^2 (m_1 + m_2) + m_2 v_2^2 (m_1 + m_2) - m_1^2 v_1^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2 - m_2^2 v_2^2}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_2 m_1 v_2^2 + m_2^2 v_2^2 - m_1^2 v_1^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2 - m_2^2 v_2^2}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 v_1^2 + m_2 m_1 v_2^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (v_1^2 - 2 v_1 v_2 + v_2^2)}{m_1 + m_2} \;\Rightarrow\; \Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{m_1 + m_2}$$

1. b) $\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{m_1 + m_2}$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{0{,}005\,\text{kg} \cdot 0{,}2\,\text{kg} (400\,\text{ms}^{-1} - 0\,\text{ms}^{-1})^2}{0{,}205\,\text{kg}} = 390{,}24\,\text{J}$$

1. c) Die Geschwindigkeit u_x, die Kugel und Geschoss nach dem Zusammenprall noch haben, berechnet sich aus der verbleibenden kinetischen Energie:

$$\frac{m_1 + m_2}{2} u_x^2 = \frac{m_1}{2} v_1^2 - \Delta E \Rightarrow u_x = \sqrt{\frac{2\left(\frac{m_1}{2} v_1^2 - \Delta E\right)}{2(m_1 + m_2)}} \Rightarrow$$

$$u_x = \sqrt{\frac{2(400\,\text{J} - 390{,}24\,\text{J})}{0{,}41\,\text{kg}}} = 6{,}89\,\text{ms}^{-1}$$

Nach dem Zusammenprall führt die Kugel zusammen mit dem Geschoss einen waagrechten Wurf aus (Abb. 2).

Abb. 2

Aus $h = -\frac{g}{2} t^2$ und $t = \frac{x}{u_x}$ folgt : $h = -\frac{g}{2} \frac{x^2}{u_x^2}$

Mit $h = -8$ m berechnet sich die horizontale Weite zu:

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot h \cdot u_x^2}{-g}} = 8{,}8\,\text{m}$$

Durch Anwendung des Satzes von Pythagoras erhält man die Entfernung vom Auflagepunkt (Abb.3):

$$s = s = \sqrt{x^2 + h^2} = 11{,}89\,\text{m}$$

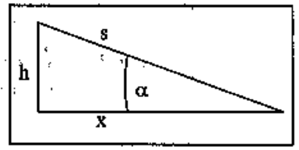

Abb. 3

1. d) Für den Aufprallwinkel gilt: $\tan\alpha = \frac{u_y}{u_x}$

Mit $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = 1{,}28$ s wird $u_y = g\,t$ zu $u_y = 12{,}56\ ms^{-1}$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{u_y}{u_x} = 1{,}823 \Rightarrow \alpha = 61°$$

2. a) Wegen $m_2 v_2 = 0$ gilt für den Impulserhaltungssatz: $m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$
Mit der Anfangsbedingung s = 120 m lässt sich die Entfernung in x-Richtung berechnen:

$$x_{m_1}^2 = s_{m_1}^2 - h^2 \Rightarrow x_{m_1} = 119{,}73\ \text{m}$$

Folglich ergibt sich für u_1 = const. in x-Richtung: $u_1 = \frac{x_{m_1}}{t} = 94{,}27\ ms^{-1}$
Eingesetzt in den Impulserhaltungssatz lässt sich die Geschwindigkeit u_2 der Kugel berechnen:

$$u_2 = \frac{m_1 v_1 - m_1 u_1}{m_2} = \frac{2\ \text{kgms}^{-1} - 0{,}47\ \text{kgms}^{-1}}{0{,}2\ \text{kg}} = 7{,}65\ ms^{-1}$$

Daraus folgt:

$$x_{m_2} = u_2 t = 7{,}65\ ms^{-1} \cdot 1{,}27\ \text{s} = 9{,}72\ \text{m}$$

Da $\quad s_{m_2}^2 = x_{m_2}^2 + h^2 \Rightarrow s_{m_2} = 12{,}59\ \text{m}$

2. b) Für die in Wärme umgewandelte kinetische Energie gilt:

$$\Delta E = \frac{m_1}{2} v_1^2 - \frac{m_1}{2} u_1^2 - \frac{m_2}{2} u_2^2$$

$$\Delta E = 400\ \text{J} - 22{,}22\ \text{J} - 5{,}85\ \text{J} = 371{,}93\ \text{J}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{371{,}93\ \text{J}}{400\ \text{J}} = 0{,}93$$

Somit werden 93 % der kinetischen Energie in Wärme umgewandelt.

3. a) Bei gleicher Geschwindigkeit v_1 vor dem Zusammenstoss ergeben sich in diesem Fall auch die gleichen Geschwindigkeiten nach dem Zusammenstoß analog zu Aufgabe 1c. Die Geschwindigkeit der Kugel einschl. Geschoss betrug $u_x = 6{,}89\ ms^{-1}$.
Im Falle des schiefen Wurfes setzt sich diese Geschwindigkeit, im Folgenden als u_0 bezeichnet, aus zwei Komponenten zusammen (Abb. 4).
$u_{x_0} = u_0 \cos 30° = 5{,}97\ ms^{-1}$
$u_{y_0} = u_0 \sin 30° = 3{,}45\ ms^{-1}$

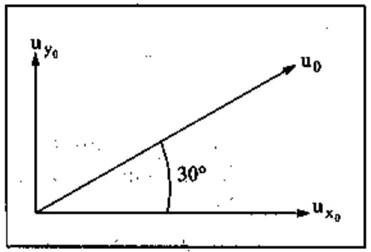

Abb. 4

Zu ermitteln ist jetzt die Zeit vom Moment des Zusammenpralls bis zum Auftreffen der Kugel auf das Wasser. Sie setzt sich zusammen aus der Steigzeit t_1 und der Fallzeit t_2. (Abb. 5).

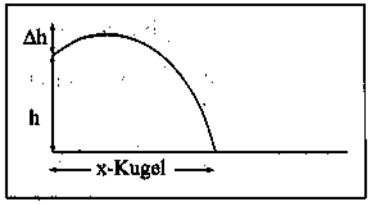

Abb. 5

Für Δh gilt: $\Delta h = u_y \cdot t_1 - \frac{g}{2} t_1^2$

Für u_y gilt: $u_y = u_0 \sin 30° - g\,t_1$

u_y wird nach Durchfliegen von Δh am Scheitelpunkt null. Damit lässt sich t_1 berechnen

$$g\,t_1 = u_0 \sin 30° \Rightarrow t_1 = \frac{u_0 \sin 30°}{g} = 0{,}35\ \text{s}$$

Mit $t_1 = 0{,}35$ s erhält man für Δh:

$$\Delta h = u_y \cdot t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = 0{,}61\text{m}$$

Anschließend fällt die Kugel aus der Höhe h + Δh = 8,61 m mit der Anfangsgeschwindigkeit $u_y = 0$ nach unten auf die Wasserfläche; daraus lässt sich t_2 berechnen:

$$h + \Delta h = \frac{g}{2} t_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2(h + \Delta h)}{g}} = 1{,}32\ \text{s}$$

$$\Rightarrow t_g = t_1 + t_2 = 1{,}67\ \text{s}$$

Bezüglich der Wasseroberfläche legt die Kugel den Weg x_K zurück:

$$x_K = u_{x_0} t_g = 9{,}97\text{ m} \;\Rightarrow$$
$$s_K^2 = x_K^2 + (h+\Delta h)^2 \;\Rightarrow\; s_K = 13{,}17\text{ m}$$

3. b) α) Bei gleichen Bedingungen wie unter Aufgabe 2 ergäben sich auch die gleichen Anfangsgeschwindigkeiten u_{1_0} und u_{2_0} nach dem Stoß, also $u_{1_0} = 94{,}27\text{ ms}^{-1}$ und $u_{2_0} = 7{,}65\text{ ms}^{-1}$. Setzt man die Geschwindigkeit u_{1_0} in die Gleichung für die Wurfweite ein, so würde man folgendes Ergebnis erhalten:

$$X = \frac{u_{1_0}^2 \sin 2\alpha}{g} = 784{,}5\text{ m}$$

Bei dieser Berechnung wäre zudem nur der Wurf von der Anfangshöhe h = 8 m bis zur Höhe h = 8 m im absteigenden Ast angenommen.

Ergebnis: Die angegebene Wurfweite von 120 m würde um ein Mehrfaches übertroffen.

Daraus ist zu schließen, dass es sich bei der Kugel um ein anderes Material handeln muss, wobei beim Durchschlagen mehr Energie in Wärme umgewandelt wurde als bei Aufgabe 2b!

β) Setzt man den Nullpunkt des Koordinatensystems an den Ausgangspunkt des unelastischen Stoßes (Abb. 6), so erhält man folgende Gleichungen:

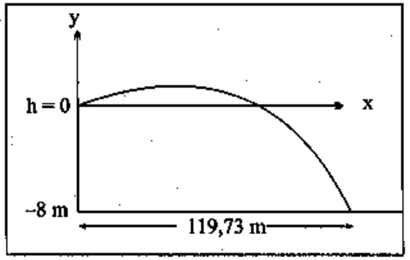

Abb. 6

$$x = u_{1_0} \cos 30°\, t$$
$$y = h = u_{1_0} \sin 30°\, t - \frac{g}{2} t^2$$

Die Bewegung in x-Richtung beginnt zur Zeit t = 0 und endet nach der Zeit t bei h = –8 m.
Daraus folgt:

$$-8\text{ m} = u_{1_0} \sin 30°\, t - \frac{g}{2} t^2$$

Setzt man $t = \frac{x}{u_{1_0} \cos 30°}$ in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$-8\text{ m} = \frac{u_{1_0} \sin 30°}{u_{1_0} \cos 30°} x - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{u_{1_0} \cos 30°}\right)^2$$

$$-8\text{ m} = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} x - \frac{g}{2 u_{1_0}^{\,2} \cos^2 30°} x^2$$

Durch entsprechende Umformung lässt sich nun die Anfangsgeschwindigkeit u_{1_0} bestimmen:

Mit $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ erhält man:

$$\tan\alpha \cdot x + 8\text{ m} = \frac{g}{2 u_{1_0}^2 \cos^2 30°} x^2$$

$$u_{1_0} = \sqrt{\frac{g x^2}{2\cos^2 30° (\tan 30° \cdot x + 8\text{ m})}}$$

$$u_{1_0} = \sqrt{\frac{9{,}81\text{ ms}^{-2} (119{,}73\text{ m})^2}{2\cos^2 30° (\tan 30° \cdot 119{,}73\text{ m} + 8\text{ m})}} = 34{,}86\text{ ms}^{-1}$$

Mit dem Impulserhaltungssatz bekommt man für u_{2_0}:

$$u_{2_0} = \frac{m_1 v_1 - m_1 u_{1_0}}{m_2} = 9{,}13\text{ ms}^{-1}$$

Mit $t = \frac{x}{u_{1_0} \cos 30°} = 3{,}97$ s errechnet sich x_K zu:

$$x_K = u_{2_0} \cos 30°\, t = 31{,}39\text{ m}$$
$$\Rightarrow s_K = \sqrt{x_K^2 + 64\text{m}^2} = 32{,}39\text{ m}$$

γ) $\Delta E = \frac{m_1}{2} v_1^2 - \frac{m_1}{2} u_1^2 - \frac{m_2}{2} u_2^2$

$\Delta E = 400\text{ J} - 3{,}039\text{ J} - 8{,}353\text{ J} = 388{,}62\text{ J}$

Daraus folgt: $\frac{\Delta E}{E} = 0{,}97$

In diesem Fall würden 97 % der kinetischen Energie in Wärme umgewandelt werden!