Lösungen

1. *Startbahn*

Die Startbahn umfaßt den Abschnitt von der Erdoberfläche bis zum Einschwenken in die Kreisbahn.

Während dieser Phase wirken auf die Trägerrakete die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ und die Schubkraft $\vec{F}_S$ der Triebwerke. Da die Kräfte entgegengesetzt gerichtet sind, gilt für die resultierende Startbeschleunigung:

$$a = \frac{F_S}{m} - g$$

Im Verlauf dieser ersten Phase nimmt die Gewichtskraft F_G ab. Die Schubkraft F_S steigt bei einstufigen Raketen mit zunehmender Höhe aufgrund des nachlassenden Luftwiderstandes und der ausgestoßenen Verbrennungsgase an. Bei mehrstufigen Raketen liefert jede Stufe einen Beitrag zur Gesamtschubkraft.

Freiflugbahn

Hat der Satellit die Erdumlaufbahn erreicht, so fliegt er antriebslos. Das Zusammenspiel von Fliehkraft und Gravitationskraft zwingt ihn auf eine kreisähnliche Bahn.

In dieser Phase wirkt die zum Erdmittelpunkt gerichtete Erdbeschleunigung als Radialbeschleunigung $\vec{a}_r$.

Aus $F_G = G \cdot \frac{m_E \cdot m_S}{r^2}$ folgt: $a_r = G \cdot \frac{m_E}{r^2}$

Abstiegsbahn

Taucht der Satellit in die Erdatmosphäre ein, so wirkt auf ihn eine Reibungskraft $\vec{F}_R$. Da $F_R << F_G$, würde der Satellit verglühen. Soll er weich landen, sind Bremsfallschirme und kurz vor dem Aufsetzen auf der Erde Bremstriebwerke erforderlich. Dabei muß der erzeugte Gegenschub größer als die Gewichtskraft sein.

2. a) Soll der Satellit die Umlaufbahn erreichen, so muß an ihm sowohl Hubarbeit W_H als auch Beschleunigungsarbeit W_B verrichtet werden. Es gilt:

$$W_G = W_H + W_B \quad \text{oder} \quad E_G = E_{pot} + E_{kin}.$$

Also:

$$E_G = G \cdot m_E \cdot m_S \left(\tfrac{1}{v_E} - \tfrac{1}{r}\right) + \tfrac{1}{2} \cdot m_S \cdot v^2$$

$$= G \cdot m_E \cdot m_S \cdot \tfrac{1}{r_E} - G \cdot m_E \cdot m_S \cdot \tfrac{1}{r} + \tfrac{1}{2} \cdot m_S \cdot v^2 \qquad (1)$$

Wir berechnen zunächst v^2. Es gilt:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot m_E \cdot m_S}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{G \cdot m_E}{r}$$

In (1) einsetzen:

$$E_G = G \cdot m_E \cdot m_S \cdot \tfrac{1}{r_E} - G \cdot m_E \cdot m_S \cdot \tfrac{1}{r} + \tfrac{1}{2} G \cdot m_E \cdot m_S \cdot \tfrac{1}{r}$$

$$= G \cdot m_E \cdot m_S \left(\tfrac{1}{r_E} - \tfrac{1}{2r}\right)$$

b) $E_G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2} \cdot 5{,}979 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \cdot 2 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot$

$$\cdot \left(\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6\,\text{m}} - \frac{1}{13{,}2 \cdot 10^6\,\text{m}}\right)$$

$$= 79{,}76 \cdot 10^{16}\,\text{Nm}^2 \cdot (1{,}57 \cdot 10^{-7} - 0{,}76 \cdot 10^{-7})\,\text{m}^{-1} = 64{,}6 \cdot 10^9\,\text{Nm}$$

Der Mindestenergiebedarf beträgt $64{,}6 \cdot 10^9$ J.

Aus $E = H \cdot m$ folgt:

$$m = \frac{E}{H} = \frac{64{,}6 \cdot 10^9\,\text{J}}{160 \cdot 10^6\,\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}} = 0{,}40 \cdot 10^3\,\text{kg}$$

Der Mindestbedarf an Treibstoff beträgt 0,40 t.

c) Die tatsächlich benötigte Treibstoffmenge ist jedoch ungleich größer. Außer dem 2 t schweren Satelliten muß die Trägerrakete mit dem gesamten Zubehör (Siehe A.29.3) mitbefördert werden.

3. a) Wir prüfen, ob die Beziehung

$$\frac{2\pi \cdot r}{v} = 2\pi \frac{r}{r_E} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}} \qquad (3)$$

erfüllt ist: Es gilt (s. Aufgabe 2a!):

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m_E}{r}} \qquad (4)$$

Aus

$$F = m_S \cdot g = G \cdot \frac{m_E \cdot m_S}{r_E^2}$$

folgt

$$g = \frac{G \cdot m_E}{r_E^2} \qquad (5)$$

(4) und (5) in (3) eingesetzt, liefert:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{G \cdot m_E}{r}}} = \frac{1}{r_E} \cdot \sqrt{\frac{r}{\frac{G \cdot m_E}{r_E^2}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{G \cdot m_E} = \frac{1}{r_E^2} \cdot \frac{r \cdot r_E^2}{G \cdot m_E},$$

womit (3) bewiesen ist.

b) $T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = 2\pi \cdot r \cdot \sqrt{\frac{r}{G \cdot m_E}}$

$$= 2\pi \cdot 6,6 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{\frac{6,6 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}{6,67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2 \cdot kg^{-2}} \cdot 5,979 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}}$$

$$= 41,47 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \cdot 1,28 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s} = 53,35 \cdot 10^2\,\mathrm{s} = 88,9\,\mathrm{min}$$

Die Umlaufzeit des Satelliten beträgt 88,9 min.

4. a) Soll der Satellit S_2 über einem bestimmten Punkt der Erde "stehen", dann ist seine Umlaufzeit gleich der der Erde um ihre Achse, also:

$$T_{S_2} = 23^{h}\,56^{min}$$

Aus

$$T = 2\pi \cdot \frac{r}{r_E} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}$$

folgt:

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{r^3}{r_E^2 \cdot g}$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot r_E^2 \cdot g}{4\pi^2}}$$

Mit den Zahlenwerten:

$$r = \sqrt[3]{\frac{74,24 \cdot 10^8\,\mathrm{s}^2 \cdot 40,58 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}^2 \cdot 9,81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}}{39,48}} \approx 4,22 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$$

$$h = r - r_E = 4,22 \cdot 10^4\,\mathrm{km} - 6370\,\mathrm{km} \approx 35,8 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$$

Der Nachrichtensatellit muß eine Höhe von 35 800 km über der Erdoberfläche haben.